

Универсиада по математике в магистратуру (2025)

ЗАДАНИЯ

1. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{(\sin x)^2}.$$

2. Найти расстояние от точки $A(3, -1, 0)$ до прямой, являющейся пересечением плоскостей $4x + y - 3z = 5$ и $-4x + y + 3z = -9$.

3. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{3z^2 + 6z - 8}{z^2 - 3z - 4}$$

в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z_0 = 2$. Указать границы кольца сходимости полученного ряда.

4. Найти решение задачи Коши

$$xy''(x) + y'(x) = \ln x + 1, \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 1.$$

5. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 5]$. Определим случайную величину Y по формуле $Y = X^2 - 1$. Найдите вероятность события $\{Y < 0\}$.

6. Найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) и полином Жегалкина функции алгебры логики $f(x, y, z, u)$, которая равна 1, если и только если не менее трех переменных принимают значение 1.

7. Таблицей задана машина Тьюринга MT . $Halt$ – состояние останова, q_0 – начальное состояние. L , R и N – сдвиг каретки (влево, вправо, на месте). Λ – «содержимое» пустой ячейки. Всегда перед запуском машины MT на ленте записана только лишь входная цепочка (ячейки слева и справа от входной цепочки пусты).

	A	B	$\#$	Λ
q_0	$A q_1 R$	$B q_2 R$	$\# q_0 R$	$\Lambda q_3 L$
q_1	$A q_1 R$	$B q_2 R$	$A q_0 R$	$\Lambda q_3 L$
q_2	$A q_1 R$	$B q_2 R$	$B q_0 R$	$\Lambda q_3 L$
q_3	$\Lambda q_4 L$	$\Lambda q_3 L$	$\Lambda q_3 L$	$\# q_3 L$
q_4	$\Lambda q_3 L$	$\Lambda q_4 L$	$\Lambda q_4 L$	$\Lambda Halt N$

Всегда перед запуском машины MT каретка стоит напротив ячейки с первым символом входной цепочки. В состоянии останова на ленте записана лишь цепочка-результат, и каретка также стоит напротив её начала.

Выпишите в лексикографическом порядке («по алфавиту») все различные входные цепочки из $(\# | A | B)^*$, длина которых равна 3 и к которым и только к которым применима машина MT . Пусть в алфавите символ $\#$ предшествует символу A . Если

искомых цепочек не существует, то укажите в ответе прочерк: – и обоснуйте, почему это так. В ответе не используйте регулярные выражения, грамматики, BNF и прочее. Явно выпишите все искомые цепочки. Дайте полное и строгое обоснование своему ответу. Ответ без обоснования не будет оцениваться на полный балл.

8. Пусть A – множество функций алгебры логики, содержащее функцию $f = x \oplus y \oplus z$ и являющееся полной системой. Кроме того, если убрать из множества A функцию f , то останется множество, не являющееся полной системой. Установить наименьшее число функций в множестве A .